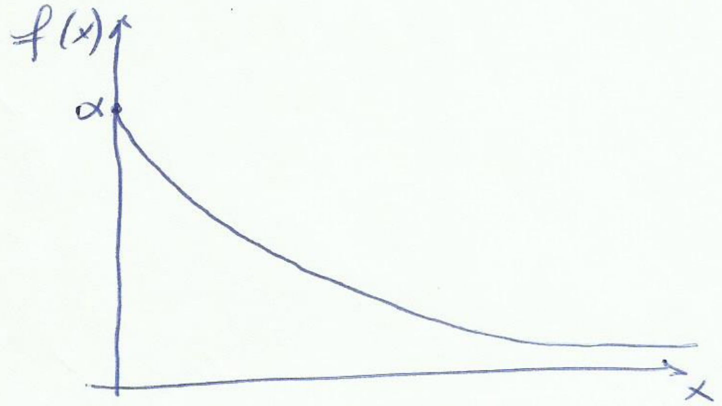
3. Üstel Dağılım

Özellikle elektronik cihazların ömür hesaplamalarında, güvenilirlik hesaplamalarında, arızaylara karşılaşma gibi problemlerin çözümünde kullanılan bir dağılımdır. Genel olarak bir olayın gerçekleşmesi için gerekli zamanın dağılışı olarak bilinir.

X sürekli t.d. $(x>0)$ olmak üzere, α parametreli olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x}, & x>0 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

$f(x)$'den de görüldüğü gibi bir parametreli bir dağılımdır. Dağılımın grafiği;



Dağılımın şekli α'ya bağlıdır. Burada, α: birim zamandaki olay sayısıdır.

Dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot dt = \alpha \cdot \left(-\frac{e^{-\alpha \cdot t}}{\alpha} \right) \Big|_0^x$$

$$= 1 - e^{-\alpha \cdot x}$$ bu durumda $P(X>x) = e^{-\alpha x}$ olur.

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha \cdot x}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

Beklenen değer ve Varyans:

$$E(X)=\int_0^\infty x\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^\infty x\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha x}\cdot dx \left\{\begin{array}{l} x=u \\ dx=du \\ e^{-\alpha x}\cdot dx=dv \\ v=-\dfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \\ \text{olur.}\end{array}\right.$$

Kısmi integral

$$u\cdot v\Big| - \int v\cdot du$$

$$\Rightarrow = \cancel{\alpha}\cdot\Big[\underbrace{x\cdot\Big(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\Big)\Big|_0^\infty}_{=0}+\int\frac{e^{-\alpha x}}{\cancel{\alpha}}\cdot dx\Big]$$

$$=\int_0^\infty e^{-\alpha\cdot x}\cdot dx=-\frac{1}{\alpha}\cdot e^{-\alpha\cdot x}\Big|_0^\infty=0-\Big(-\frac{1}{\alpha}\cdot e^0\Big)$$

$$=\frac{1}{\alpha}$$

$$E(x^2)=\int_0^\infty x^2\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha x}\cdot dx=\alpha\cdot\int x^2\cdot e^{-\alpha x}\cdot dx$$

$$u\cdot v - \int v\cdot du \qquad \left\{\begin{array}{l} x^2=u \\ 2x\,dx=du \\ e^{-\alpha x}dx=dv \\ \Rightarrow v=-\dfrac{1}{\alpha}\cdot e^{-\alpha x}\end{array}\right.$$

$$=\alpha\cdot\Big[\underbrace{x^2\Big(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\Big)\Big|_0^\infty}_{=0}+\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}}{\cancel{\alpha}}\cdot 2x\cdot dx\Big]$$

$$=2\cdot\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot x\cdot dx$$

$$=2\cdot\int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha}\cdot x\cdot e^{-\alpha\cdot x}\cdot dx$$

$$=\frac{2}{\alpha}\cdot\underbrace{\int x\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot x}\cdot dx}_{=E(x)=\frac{1}{\alpha}}=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow E(x^2)=\frac{2}{\alpha^2}$$

Böylece,

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{2}{\alpha^2}-\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^2=\frac{1}{\alpha^2}$$

olur.

Karekteristik fonksiyon,

$$\Phi_X(t) = E(e^{i.t.x}) = \int_0^\infty e^{itx} . f(x) . dx$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} . \alpha . e^{-\alpha . x} . dx$$

$$= \alpha . \int_0^\infty e^{-x.(\alpha - i.t)} . dx$$

$$= \alpha . \left(-\frac{1}{(\alpha - it)} . e^{-x.(\alpha - it)} \right) \Big|_0^\infty$$

$$= \alpha \left[\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} - \left(-\frac{1}{\alpha - it} . e^{0} \right) \right] = \frac{\alpha}{\alpha - i.t} \quad //$$

Moment Çıkaran fonksiyon,

$$M_X(t) = E(e^{t.x}) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)$$ olur.